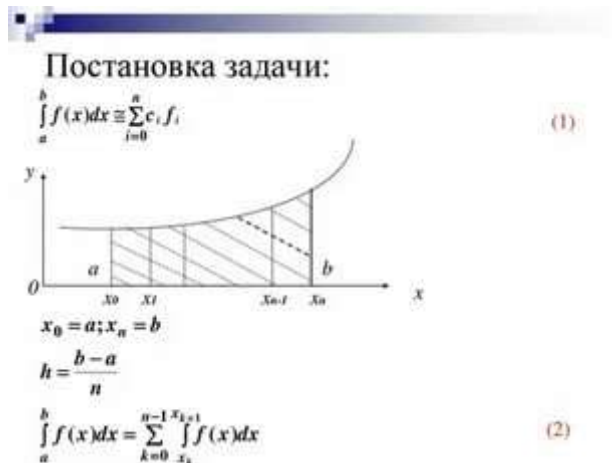


Численное интегрирование

Численное интегрирование — это процедура вычисления приближённого значения определённого интеграла на основе ряда значений подынтегральной функции. Оно применяется, когда аналитическое вычисление интеграла невозможно или затруднительно, например, из-за сложности первообразной или табличного задания функции.



Основные принципы

Определённый интеграл от неотрицательной функции $y = f(x)$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, осью Ox , прямыми $x = a$ и $x = b$.

Общий подход к численному интегрированию заключается в разбиении интервала интегрирования $[a, b]$ на более мелкие интервалы, вычислении площади каждой получившейся фигуры и суммировании этих площадей.

Формулы численного вычисления однократного интеграла называют квадратурными, а для двойного и более кратного интеграла — кубатурными.

Некоторые методы численного интегрирования

- Метод прямоугольников. Простейший метод, при котором определённый интеграл заменяется интегральной суммой. В зависимости от выбора точек

разбиения (левые, правые или средние границы отрезков) получаются разные варианты метода.

- Метод трапеций. Подынтегральная функция на каждом отрезке заменяется линейной аппроксимацией (трапецией), а интеграл вычисляется как сумма площадей этих трапеций.

- Метод Симпсона (парабол). Использует три точки отрезка интегрирования (концы отрезка и его среднюю точку) для замены подынтегральной функции параболой. Это повышает точность по сравнению с методом трапеций.

- Метод Гаусса. Позволяет выбирать точки вычисления значений функции, что даёт методы более высокого порядка точности при том же количестве вычислений подынтегральной функции.

- Метод Монте-Карло. Стохастический алгоритм, который использует случайные точки для определения площади под графиком функции.

Когда применяется численное интегрирование

- Подынтегральная функция задана в виде таблицы или массива значений в узлах расчётной сетки.

- Аналитическое представление функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции (например, $f(x) = \exp(-x^2)$).

- Вид первообразной настолько сложен, что быстрее вычислить значение интеграла численным методом.

Особенности

- Погрешность. Чем меньше шаг разбиения интервала, тем точнее вычисляется интеграл. Однако уменьшение шага может привести к накоплению вычислительной погрешности.

- Оценка погрешности. Часто сводится к нахождению наибольшего значения производных функции на известном отрезке.
- Выбор метода. Зависит от характера подынтегральной функции, требуемой точности и вычислительных ресурсов.

Для реализации численного интегрирования существуют программные средства и библиотеки, например, в системах MathCAD, MATLAB и других.